

Preuves par récurrence et suites

Reprenons notre suite d'avant, définie par récurrence : $a_{n+1} = 2 - \frac{1}{a_n}$ et $a_1 = \frac{3}{2}$
 $(a_n) = (\frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \dots) \leadsto$ hypothèse : $a_n = \frac{n+2}{n+1}$

On peut prouver l'hypothèse avec une preuve par récurrence :

Initialisation : $a_1 = \frac{3}{2} = \frac{1+2}{1+1}$ ✓ Hyp de

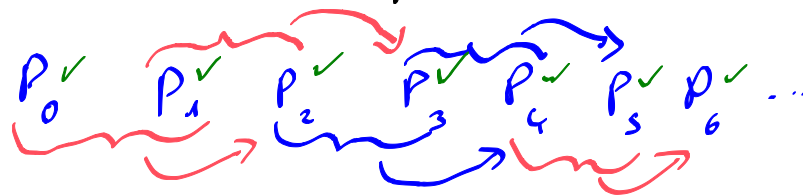
Hérédité : Supposons $a_n = \frac{n+2}{n+1}$ ✓ Rec

$$a_{n+1} = 2 - \frac{1}{a_n} = 2 - \frac{1}{\frac{n+2}{n+1}} = 2 - \frac{n+1}{n+2} \\ = \frac{2(n+2) - (n+1)}{n+2} = \frac{n+3}{n+2} = \frac{(n+1)+2}{(n+1)+1} \quad \checkmark$$

Rem - Pour montrer par récurrence que $\forall n \geq N, P_n$ est vraie pour $N \in \mathbb{N}$ l'étape d'initiation devient : montrer P_N

Rem - On peut aussi vérifier plusieurs valeurs dans l'initialisation, par exemple vérifier que

P_0 et P_1 sont vraies
et après comme étape d'hérédité :
 $(P_n \text{ et } P_{n+1}) \Rightarrow P_{n+2}$
Ainsi, P_n est vraie pour tout n :



Limites de suites

Intuition :

$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = a \iff$ Pour des grandes valeurs de n , (a_n) reste arbitrairement proche de a !
la suite (a_n) converge vers la limite $a \in \mathbb{R}$

Définition formelle

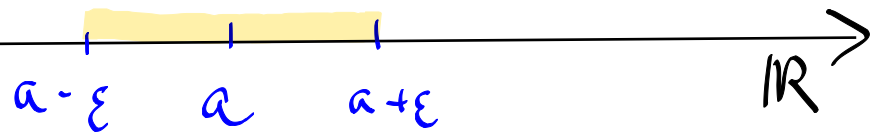
$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = a \Leftrightarrow a_n \rightarrow a$$

$\Downarrow$ ②

$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N, \underbrace{|a_n - a|}_{\text{①}} < \varepsilon$

① $|a_n - a|$ est la distance entre a_n et a .

On demande alors que la distance entre a_n et a soit moins que ε . On dit que un tel nombre est ε -proche de a , ou qu'il est dans le ε -voisinage de a .



② Quand est-ce que a_n doit être ε -proche de a ? Après un certain seuil N , c'est à dire, $\forall n \geq N$.

Rem Le seuil N , peut dépendre de ε ! En générale, plus $\varepsilon > 0$ est petit, plus c'est dur d'être ε -proche de a , plus il faut choisir un seuil N plus grand.

Montrer qu'une limite a existe, c'est exactement montrer que, quelque soit $\varepsilon > 0$ (même si il est très très petit) un seuil N existe.

Rem Pour beaucoup de suites (a_n) , il n'y a pas de $a \in \mathbb{R}$ tel que $a_n \rightarrow a$.

Nous appelons de tel suites divergente.
Sinon la suite est dite convergente.

Exemples ① Soit $a_n = \frac{1}{n}$.

Montrer que $a_n \rightarrow 0$

Soit $\varepsilon > 0$. On doit trouver un seuil N , après lequel, $|a_n - 0| < \varepsilon$. On a

$$|a_n - 0| = |a_n| = \frac{1}{n}$$

Penc on doit trouver N tel que

$$\frac{1}{n} < \varepsilon \quad \forall n \geq N$$

$\frac{1}{n} < \varepsilon$; $n > \frac{1}{\varepsilon}$; Donc n'importe quel seuil N tel que $N > \frac{1}{\varepsilon}$ fonctionne!

② Soit $a_n = \left(\frac{2n+1}{n}\right)^2$.

Montrer que $a_n \rightarrow 4$.

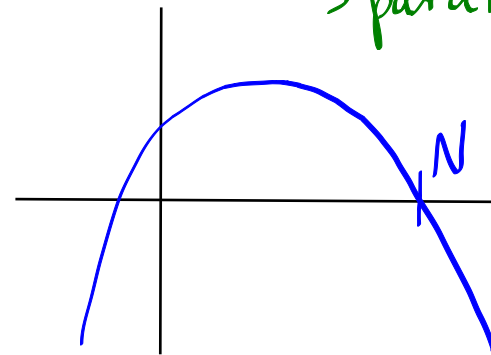
Soit $\varepsilon > 0$. On doit trouver un seuil N , après lequel, $|a_n - 4| < \varepsilon$. On a

$$|a_n - 4| = \left| \frac{(2n+1)^2}{n^2} - 4 \right|$$

$$= \left| \frac{4n^2 + 4n + 1}{n^2} - \frac{4n^2}{n^2} \right| = \left| \frac{4n+1}{n^2} \right| < \varepsilon$$

$$\frac{4n+1}{n^2} < \varepsilon; \quad -\varepsilon n^2 + 4n + 1 < 0$$

↳ parabole qui 'ne sourit pas'



À partir d'un certain N , c'est < 0 !
Quel N ?

On trouve la plus grande racine avec Δ :
 $\frac{4 + \sqrt{16 + 4\varepsilon}}{2\varepsilon}$, donc $N > \frac{4 + \sqrt{16 + 4\varepsilon}}{2\varepsilon}$

fonctionne!

③ Montrer que $a_n = (-1)^n$ diverge.

Supposons $a_n \rightarrow a$ (preuve par contradiction)

$$\Rightarrow \forall \varepsilon \exists N > 0 \text{ tel que } |a_n - a| < \varepsilon \quad \forall n \geq N$$

$$\Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon \text{ et } |a_{n+1} - a| < \varepsilon$$

Prenons $\varepsilon = \frac{1}{4}$ et supposons N pair (sinon on remplace N par $N+1$). On a

$$|a_N - a| < \frac{1}{4}; \quad |1 - a| < \frac{1}{4}$$

a est $\frac{1}{4}$ -proche de 1

$$|a_{N+1} - a| < \frac{1}{4}; \quad |-1 - a| < \frac{1}{4}$$

pas possible!

a est $\frac{1}{4}$ -proche de -1

$\Rightarrow$ la suite diverge.

Rem $a_n \rightarrow a$ implique que

$\# \{n \in \mathbb{N}^* \mid |a_n - a| \geq \varepsilon\}$ est finie $\forall \varepsilon > 0$

l'ensemble de a_n ε -proche de a .

donc une manière de montrer que suite diverge est de montrer que $\exists \varepsilon > 0$ tel que cet ensemble est infinie.

Thm Une suite admet au plus une seule limite.
Preuve: exercice facultatif.

